



VESTIBULAR FGV

QUESTÃO 01 | Álgebra: frações algébricas e soma telescópica.

- a) Mostre que a fração $\frac{1}{k(k+1)}$ pode ser escrita como $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
- b) Use o resultado do item a) para calcular a soma $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$.

Resposta:

a) $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

b) Seja S a soma dada. Usando o item a):

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots +$$

$$\left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$$

$$S = 1 - \frac{1}{100} \rightarrow \boxed{\therefore S = \frac{99}{100}}$$



QUESTÃO 02 | Regra de três composta.

Um grupo de trabalhadores, todos com a mesma eficiência, deviam arar dois campos, sendo que um campo era 3 vezes maior que o outro. Durante a primeira metade do dia, o grupo todo ficou arando o campo maior; porém, na segunda metade do dia, o grupo se dividiu em dois: dois terços do grupo ficaram para terminar o campo grande, enquanto os demais começaram a arar o campo pequeno. Ao final do dia, o campo grande estava arado, mas restava uma parte do pequeno, que foi arada no dia seguinte por dois trabalhadores trabalhando o dia todo.

Quantos trabalhadores havia no grupo?

Resposta:

Campo menor: área A .

Campo maior: área $3A$.

Total de trabalhadores: T .

T trabalhadores aram $x \text{ m}^2$ em $\frac{1}{2}$ dia e

$\frac{2T}{3}$ trabalhadores aram $(3A - x) \text{ m}^2$ em $\frac{1}{2}$ dia.

$$\text{Logo, } \frac{T}{x} = \frac{\frac{2T}{3}}{(3A-x)} \Rightarrow 3A - x = \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \frac{5x}{3} = 3A \therefore x = \frac{9A}{5}.$$

T trabalhadores aram $\frac{9A}{5} \text{ m}^2$ em $\frac{1}{2}$ dia.

$\frac{T}{3}$ trabalhadores aram $y \text{ m}^2$ em $\frac{1}{2}$ dia.

$$\therefore y = \frac{3A}{5}.$$

Restou a área $\frac{2A}{5} \text{ m}^2$ para o dia seguinte.

2 trabalhadores aram $\frac{2A}{5} \text{ m}^2$ em 1 dia.

T trabalhadores aram $\frac{9A}{5} \text{ m}^2$ em $\frac{1}{2}$ dia.

$$\frac{T}{2} = \frac{\frac{9A}{5}}{\frac{2A}{5}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{T}{2} = 9 \Leftrightarrow \boxed{T = 18}$$

Resp: 18.



QUESTÃO 03 | Análise combinatória e probabilidade.

Considere um hexágono regular de vértices A, B, C, D, E e F, nomeados nessa ordem no sentido horário. Pintam-se aleatoriamente 2 desses vértices de azul e 2 outros de vermelho.

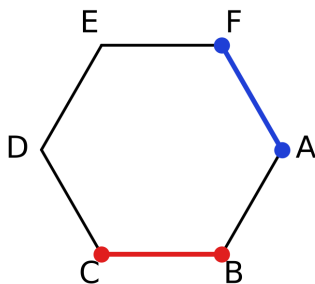
- a) Quantas pinturas diferentes podem ser obtidas?
- b) Qual a probabilidade de que a pintura obtida tenha os 2 vértices azuis adjacentes e também os 2 vértices vermelhos adjacentes?

Resposta:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} &= 15 \cdot 6 \\ &= \boxed{90} \end{aligned}$$

Resp: 90.

b)



Escolher 2 vértices adjacentes equivale a escolher um segmento que seja lado do hexágono. Logo, há 6 maneiras de escolher 1 lado para a cor azul. Excluído este lado e os 2 adjacentes a ele, restam 3 lados para a cor vermelho. Logo, a probabilidade é: $\frac{6 \cdot 3}{90} = \boxed{\frac{1}{5}}$.



QUESTÃO 04 | Progressão aritmética (soma de PA)

- a) Calcule a soma dos múltiplos de 5 maiores do que 35 e menores do que 85.
- b) Calcule a soma das frações racionais irredutíveis com denominador 5 e compreendidas entre 7 e 17.

Resposta:

- a) Os múltiplos de 5 formam uma progressão aritmética de razão 5.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$\text{P.A.} \left(\underset{a_1}{40}, 45, \dots, \underset{a_n}{80} \right)$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$80 = 40 + (n - 1) \cdot 5$$

$$40 = (n - 1) \cdot 5$$

$$8 = n - 1 \rightarrow \boxed{n = 9}$$

$$S_9 = \frac{(a_1 + a_9) \cdot 9}{2}$$

$$S_9 = \frac{(40 + 80) \cdot 9}{2}$$

$$\boxed{S_9 = 540}$$

A soma vale 540.

- b) As frações irredutíveis com denominador 5 compreendidas entre 7 e 17 possuem numerador que não é múltiplo de 5.

S : soma de todas as frações de denominador 5, que estejam entre 7 e 17:

$$\left(\frac{36}{5}, \frac{37}{5}, \frac{38}{5}, \dots, \frac{84}{5} \right)$$

constituem uma P.A. de $a_1 = 36/5$, $a_n = 84/5$ e $r = 1/5$.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$\frac{84}{5} = \frac{36}{5} + (n - 1) \cdot \frac{1}{5}$$

$$84 = 36 + n - 1$$

$$\underline{\underline{n = 49}}$$

$$S = \frac{(a_1 + a_{49}) \cdot 49}{2} = \frac{(36/5 + 84/5) \cdot 49}{2}$$

$$S = 12 \cdot 49 \rightarrow \boxed{S = 588}$$

S_{M5} : soma das frações redutíveis, de denominador 5, compreendidas entre 7 e 17:

$$\left(\frac{40}{5}, \frac{45}{5}, \dots, \frac{80}{5} \right)$$

$$S_{M5} = \frac{1}{5} \cdot (40 + 45 + \dots + 80) = \frac{1}{5} \cdot 540 = 108$$

$\bar{S}$: soma pedida neste item

$$\bar{S} = S - S_{M5} = 588 - 108 = \underline{\underline{480}}$$

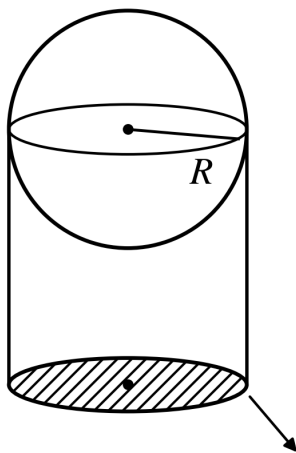
QUESTÃO 05 | Geometria espacial e plana com taxa de variação.

Um balão esférico está sendo inflado de modo que seu volume aumenta à taxa constante de $2\pi \text{ cm}^3$ por segundo. A sombra do balão no chão, projetada por raios solares paralelos e perpendiculares ao solo, é um círculo de mesmo raio que o balão. No instante $t = 0$, a área da sombra é $16\pi \text{ cm}^2$.

- Determine o volume do balão no instante $t = 0$.
- Determine a área da sombra no instante $t = 16$ segundos.

Resposta:

a)



$$A = 16\pi = \pi R^2$$

$$R^2 = 16$$

$$R = 4 \text{ cm}$$

$$V_{\text{balão}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = \frac{256\pi}{3} \text{ cm}^3$$

b) Para $t = 16$, $V_{\text{balão}} = \frac{256\pi}{3} + 16 \cdot 2\pi$

$$V_{\text{balão}} = \frac{352\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{352\pi}{3} \rightarrow R^3 = 88$$

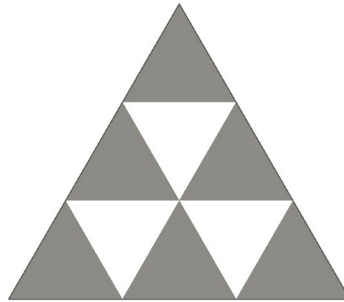
$$R = 2\sqrt[3]{11} \text{ cm}$$

Em $t = 16$ s:

$$A_{\text{sombra}} = \pi R^2 = \pi \cdot (2\sqrt[3]{11})^2 = \underline{\underline{4\sqrt[3]{121}\pi \text{ cm}^2}}$$

QUESTÃO 06 | Sequências e padrões (soma de PA / números triangulares) e porcentagem.

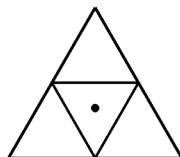
Um artista plástico criou uma série de painéis decorativos, todos na forma de um triângulo equilátero e pavimentados por pequenos azulejos, congruentes entre si, também em formato de triângulo equilátero. Nesses painéis, os azulejos que têm um vértice apontando para cima são cinza, enquanto os azulejos que têm um vértice apontando para baixo são brancos. A figura abaixo mostra um desses painéis, composto por 6 azulejos cinza e 3 azulejos brancos.



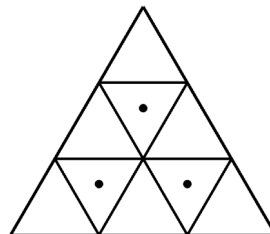
Em um dos painéis dessa série, os azulejos brancos representam exatamente 48% do total de azulejos do painel. Determine quantos azulejos brancos e quantos azulejos cinza compõem esse painel.

Resposta:

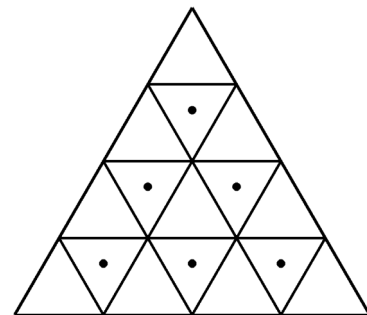
Sequências numéricas



Total: 4
Branco: 1



Total: 9
Branco: 1 + 2



Total: 16
Branco: 1 + 2 + 3

$$\frac{1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)}{n^2} = 48\%$$

$$\frac{(1 + n - 1) \cdot (n - 1)}{2} = \frac{48}{100} \cdot n^2$$

$$\frac{n \cdot (n - 1)}{2n^2} = \frac{48}{100}$$

$$100 \cdot n \cdot (n - 1) = 48 \cdot 2n^2$$

(pois $n \neq 0$)

$$100n - 100 = 96n$$

$$4n = 100$$

$$n = 25$$

$$\text{Total de azulejos: } 25^2 = 625$$

$$\text{Azulejos brancos: } 48\% \text{ de } 625 = 300$$

$$\text{Azulejos cinza: } 325$$

QUESTÃO 07 | Razão e Proporção

Dois tratamentos (A e B) foram testados em pacientes, separados em casos leves e casos graves. Os dados relativos à recuperação dos pacientes com esses tratamentos estão nas tabelas abaixo, onde a taxa de recuperação foi arredondada.

		Recuperados	Total de pacientes	Taxa de recuperação
Tratamento A	Casos leves	18	20	90%
	Casos graves	40	100	40%
	Total de casos	58	120	48%

		Recuperados	Total de pacientes	Taxa de recuperação
Tratamento B	Casos leves	60	100	60%
	Casos graves	x	50	?
	Total de casos	$60 + x$	150	?

- a) Considerando $x = 16$, calcule:
- A taxa de recuperação do tratamento B nos casos graves e no total de casos.
 - Diga qual dos tratamentos (A ou B) apresentou maior taxa de recuperação nos casos leves, nos casos graves e no total de casos.
- b) Determine a faixa de valores inteiros possíveis para x de modo que ocorram simultaneamente as seguintes situações:
- a taxa de recuperação do tratamento B seja menor que a do tratamento A tanto nos casos leves quanto nos casos graves;
 - a taxa de recuperação total do tratamento B seja maior que a taxa de recuperação total do tratamento A.

Resposta:

- a) Para $x = 16$: (Tratamento B)

	Recuperados	Total de pacientes	Taxa de recuperação
Casos leves	60	100	60%
Casos graves	16	50	32%
Total de casos	76	150	51%

- i) Taxa de recuperação dos casos graves:

$$16/50 = 0,32 = 32\%$$

Taxa de recuperação no total de casos:

$$76/150 = 0,50666 \dots \approx 0,51 = 51\%$$

Casos leves: tratamento A possui maior taxa de recuperação

tratamento A possui maior taxa de recuperação

tratamento B possui maior taxa de recuperação

(Paradoxo de Simpson)

$$b) \begin{cases} \frac{x}{50} < 40\% \rightarrow x < 20 \\ \frac{60+x}{150} > 48\% \rightarrow 60+x > 72 \\ x > 12 \end{cases}$$

$$\therefore 12 < x < 20$$

QUESTÃO 08 | Função do 2º grau; Sistema de Equações do 2º grau.

Considere as parábolas com equações da forma

$$y = a(x - x_0)^2,$$

com $a > 0$ (ou seja, com concavidade para cima e vértice sobre o eixo Ox).

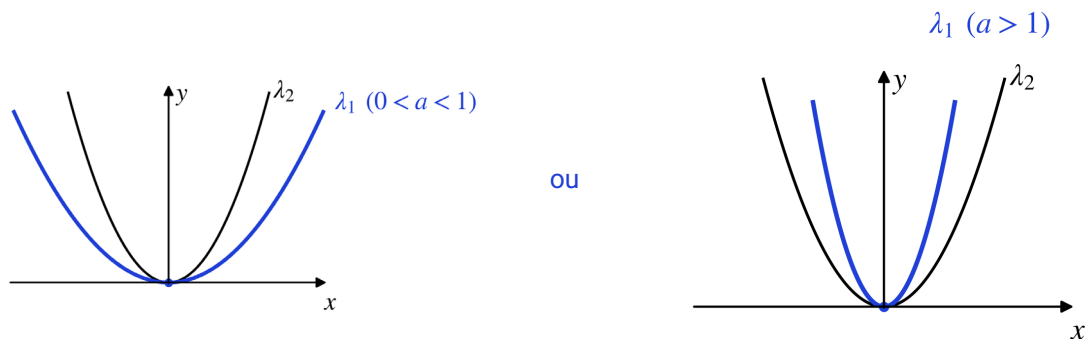
Determine todos os pares de parâmetros (a, x_0) tais que a parábola com esses parâmetros tenha um, e não mais do que um, ponto de interseção com a parábola $y = x^2$.

Resposta:

Sejam: λ_1 a parábola dada por $y = a(x - x_0)^2$ e
 λ_2 a parábola dada por $y = x^2$.

- Caso 1: $x_0 = 0$.

Então:



Caso 1: (a, x_0) tais que $(x_0 = 0 \text{ e } 0 < a < 1)$ ou $(x_0 = 0 \text{ e } a > 1)$.

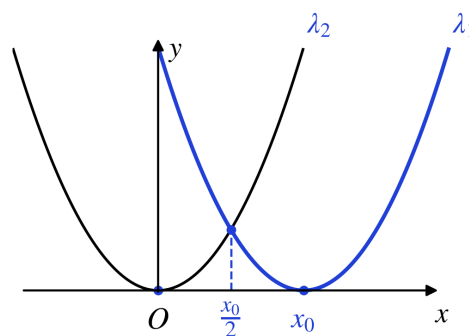
- Caso 2: $x_0 \neq 0$.

$a(x - x_0)^2 = x^2$ deve ter apenas 1 solução real.

$$ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2 = x^2$$

$$(a - 1)x^2 - 2ax_0x + ax_0^2 = 0$$

1º) Se $a = 1$, então a solução é única. $(x = \frac{x_0}{2})$



2º) Se $a \neq 1$, então devemos ter:

$$\Delta = 0: (-2ax_0)^2 - 4 \cdot (a - 1) \cdot ax_0^2 = 0$$

$$4a^2x_0^2 - 4a^2x_0^2 + 4ax_0^2 = 0$$

$$4ax_0^2 = 0$$

$a = 0$ (não convém, pois $a > 0$) ou $x_0 = 0$ (não convém, pois a premissa desse caso é justamente $x_0 \neq 0$).

Caso 2: (a, x_0) tais que $a = 1$ e $x_0 \neq 0$.

Resp: (a, x_0) tais que $(x_0 = 0 \text{ e } 0 < a < 1)$ ou $(x_0 = 0 \text{ e } a > 1)$ ou $(a = 1 \text{ e } x_0 \neq 0)$.