QUESTÃO 1 **Assunto: Função do 1° grau**

A sensação térmica é uma medida de como as pessoas sentem frio quando expostas ao vento. Uma boa estimativa para sensação térmica pode ser encontrada usando a fórmula:

$$\text{(sensação térmica)} = \text{(temperatura do ar)} - 0{,}7 \times \text{(velocidade do vento)},$$

onde a temperatura do ar é medida em graus Fahrenheit ($^{\circ}\mathrm{F}$) e a velocidade do vento é medida em milhas por hora (mph).

A Supondo que a temperatura do ar seja de $40°\mathrm{F}$ e a velocidade do vento seja de $24\ \mathrm{mph}$, calcule a sensação térmica.

B Usando a relação $5\mathrm{F} - 9\mathrm{C} = 160$, entre as medidas de temperatura em graus Fahrenheit (F) e graus Celsius (C), expresse, em graus Celsius, a sensação térmica calculada no item a).

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Sensação térmica: S
Velocidade do vento: V

a)

$$S = 40 - 0{,}7 \cdot 24 = 40 - 16{,}8 \therefore S = 23{,}2°F$$

b)

$$SF - 9C = 160 \Rightarrow 9C = 5F - 160$$

$$\Rightarrow C = \frac{5F - 160}{9} \Rightarrow C = \frac{5 \cdot (23{,}2) - 160}{9}$$

$$\therefore C = \frac{-44}{9}°C$$

QUESTÃO 2 **Assunto: Geometria Plana**

Considere dois círculos concêntricos de centro O e raios diferentes.

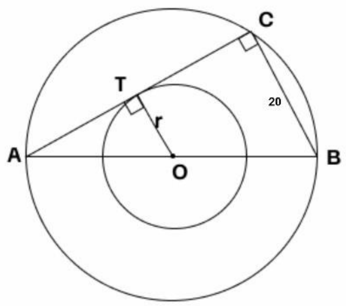
Sejam AB um diâmetro do círculo maior e AC uma corda do círculo maior que é tangente ao círculo menor no ponto T.

O segmento BC mede $20\ \mathrm{cm}$.

A Faça uma figura que descreva a situação apresentada.
B Calcule o raio do círculo menor.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

a)



b)

$$\triangle \mathrm{ACB} \sim \triangle \mathrm{ACO} : \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AT}}} = \frac{\overline{\mathrm{TO}}}{\overline{\mathrm{CB}}} = \frac{\overline{\mathrm{AO}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$$

$$\frac{r}{20} = \frac{R}{2R} \rightarrow r = 10\ cm$$

QUESTÃO 3 **Assunto: Estatística**

Seja $M(a, b, c)$ a mediana dos três números reais a, b, c. Por exemplo, $M(1,2,5) = 2$ e $M(100,8,50) = 50$.

Dois números reais distintos x e y são tais que:

$$\begin{cases} M(x, y, 20) = 8 \\ M(x, 2y, 20) = 12 \end{cases}$$

Determine x e y.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Hipótese 1: $x > y$

$$(y, x, 20) \rightarrow M(x, y, 20) = 8 \therefore x = 8$$

$$(x, 2y, 20) \rightarrow M(x, 2y, 20) = 12$$
$$2y = 12$$
$$y = 6$$

Hipótese é válida.

Hipótese 2: $y > x$

$$(y, x, 20) \rightarrow M(x, y, 20) = 8 \therefore x = 8$$

$$(x, 2y, 20) \rightarrow M(x, 2y, 20) = 12$$
$$2y = 12$$
$$y = 6$$

Hipótese não é válida.

Logo, $x = 8$ e $y = 6$ na Hipótese 1.

QUESTÃO 4 **Assunto: PA**

A sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ é chamada de progressão harmônica quando todo termo a_n (com $n > 1$) é a média harmônica entre o antecessor e o sucessor, isto é, $a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}$.

Dada uma progressão harmônica $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ defina uma nova sequência $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ onde, para todo $n, b_n = \frac{1}{a_n}$.

A Explique por que a sequência *bn* é uma progressão aritmética.
B Calcule a_{2023} em função de b_1 e $r = b_2 - b_1$.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

a)

Progressão Harmônica $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$

$$a_N = \frac{2}{\frac{1}{a_{N-1}} + \frac{1}{A_{N+1}}} \to a_N = \frac{2}{b_{N-1} + b_{N+1}}$$

$$b_{N-1} + b_{N+1} = \frac{2}{a_N} \to b_{N-1} + b_{N+1} = 2b_N$$

$$\therefore b_N = \frac{b_{N-1} + b_{N+1}}{2}$$

b)

$$b_{2023} = b_1 + 2022r$$

$$b_{2023} = \frac{1}{a_{2023}} \to a_{2023} = \frac{1}{b_1 + 2022r}$$

$$a_{2023} = \frac{1}{b_1 + 2022(b_2 - b_1)} \to a_{2023} = \frac{1}{2022b_2 - 2021b_1}$$

QUESTÃO 5 **Assunto: Contagem e Sistemas Lineares**

No Dia das Bruxas, as 37 crianças de uma turma resolveram ir à sala da diretora da escola para pedir doces. Como sempre acontece nesses dias, elas combinaram entre si que algumas delas sempre responderiam a verdade, outras sempre responderiam mentiras e as demais, alternadamente, responderiam verdades ou mentiras. Essas, as "*alternadoras*", escolheriam, cada uma delas, arbitrariamente a primeira resposta (verdade ou mentira) e depois alternariam os valores-verdade das respostas seguintes.

A diretora da escola, como sempre, fez a todas as crianças as mesmas três perguntas nesta ordem:

"Você sempre diz a verdade?". A diretora deu um doce para cada uma das 31 crianças que responderam "sim".
"Você é uma "*alternadora*"?". A diretora deu um doce para cada uma das 24 crianças que responderam "sim".
"Você sempre mente?". A diretora deu um doce para cada uma das 11 crianças que responderam "sim".

A Quantas são as crianças "*alternadoras*" que começaram dizendo a verdade?
B Quantos doces ao todo receberam as crianças que sempre mentem?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Sejam:

v: o número de crianças que sempre dizem a verdade;
m: o número de crianças que sempre mentem;
a_v: o número de crianças "alternadoras" que dizem a verdade na primeira resposta;
a_m: o número de crianças "alternadoras" que mentem na primeira resposta.

Logo, podemos escrever:

$$v + m + a_v + a_m = 37\ (I)$$

Para a 1ª pergunta, responderam "sim":

$$v + m + a_m = 31\ (II)$$

Portanto, $a_v = 6\ (i)$

Para a 2ª pergunta, responderam "sim":

$$m + a_m = 24\ (III)$$

De $(II)\ e\ (III)$ concluímos que $v = 31 - 24 \therefore v = 7\ \ (ii)$

Para a 3ª pergunta, responderam "sim":

$$a_m = 11\ (IV)$$

Substituindo $(i), (ii)$ e (IV) em (I) obtemos:

$$7 + m + 6 + 11 = 37$$

$$m + 24 = 37$$

$$m = 13\ (iii)$$

a) 6
b) Cada criança que sempre mente recebeu 2 doces. Então, ao todo, elas receberam $13 \cdot 2 = 26\ doces$.

QUESTÃO 6 **Assunto: Aritmética**

O jogo “Reduza a Palavra” é um quebra-cabeça, cujo objetivo é aplicar transformações sucessivas em uma palavra (sequências de caracteres ‘a’ e ‘b’) até reduzi-la à palavra ‘b’. As transformações permitidas são as trocas das seguintes sequências de caracteres:

1) ‘bab’ <-> ‘ba’
2) ‘abb’ <-> ‘ab’
3) ‘aba’ <-> ‘b’

Por exemplo, a palavra ‘bb’ pode ser transformada em ‘b’ através das seguintes transformações:

- De ‘bb’ para ‘abab’ (por 3), pois (b)b -> (aba)b
- De ‘abab’ para ‘aba’ (por 1), pois a(bab) -> a(ba)
- De ‘aba’ para ‘b’ (através de 3)

Note que as trocas podem ocorrer nos dois sentidos: no exemplo acima trocamos ‘b’ por ‘aba’ (por 3) e também trocamos ‘aba’ por ‘b’ (também por 3).

A Exiba uma série de transformações que reduzam a palavra ‘baba’ até ‘b’.
B Explique por que a palavra ‘ababa’ não pode ser reduzida até ‘b’.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

a)

$$b(aba) \overset{3}{\rightarrow} b(b)$$

$$(b)b \overset{3}{\rightarrow} (aba)b$$

$$a(bab) \overset{1}{\rightarrow} a(ba)$$

$$(aba) \overset{3}{\rightarrow} (b)$$

b) Dentre as transformações permitidas, apenas a transformação 3 permite a eliminação de “a”. Nota-se que essa transformação permite apenas a redução de 2”a” por vez.

Como “$ababa$” apresenta um número ímpar de “a” e a única transformação que elimina “a” os elimina de 2 em 2, todas as transformações da palavra “$ababa$” terão sempre um número ímpar de “a”.

Por isso, “$ababa$” não pode ser reduzida a “b”.

QUESTÃO 7 **Assunto: Análise Combinatória**

No sistema de coordenadas cartesianas, considere M pontos diferentes pertencentes ao semieixo positivo das abcissas e N pontos, também diferentes, pertencentes ao semieixo positivo das ordenadas.

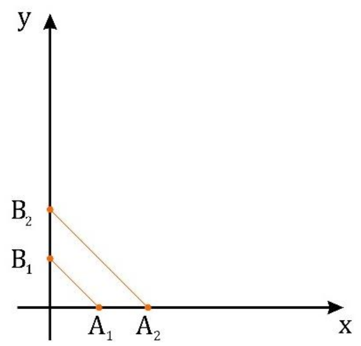
Traçam-se os $M \times N$ segmentos de reta que unem cada um dos M pontos do semieixo das abcissas a cada um dos N pontos do semieixo das ordenadas.

Em cada uma das duas situações a seguir, calcule o número máximo de pontos de interseção desses $M \times N$ segmentos de reta que pertençam ao interior do primeiro quadrante, isto é, os pontos de interseção que tenham as duas coordenadas maiores do que zero:

A $M = N = 2$.
B $M = 8$ e $N = 6$.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

a)



O número de pontos de interseção pedido é 1.

b)

No item (a) podemos observar que $A_1A_2B_2B_1$ é um quadrilátero convexo e que $\overline{A_1B_2}$ são as suas diagonais que, naturalmente, apresentam 1 único cruzamento (ponto de interseção) no interior do 1º quadrante.

Analogamente, ao determinarmos o número de quadriláteros convexos possíveis com 2 vértices no semieixo positivo das abscissas e com 2 vértices no semieixo positivo das ordenadas, este será o número de cruzamentos de suas diagonais. Logo, temos:

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,6!} = 28$$

maneiras de escolhermos 2 pontos no eixo x e

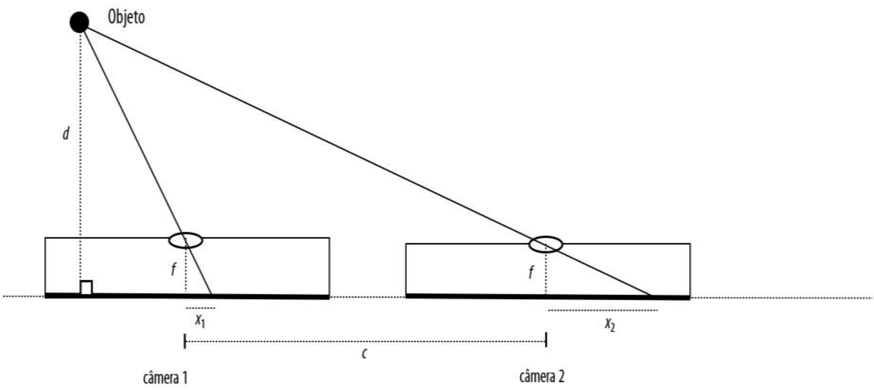
$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$$

maneiras de escolher 2 pontos no eixo y.

Portanto, o número pedido é $28 \cdot 15 = 420$.

QUESTÃO 8 **Assunto: Geometria Plana**

Um par de câmeras idênticas foi posicionado para realizar "visão estereoscópica", que é um procedimento que usa as imagens de duas câmeras para estimar a distância de objetos. As câmeras têm distância focal f (a distância entre o furo por onde passa a luz e o plano de imagens da câmera – o plano que contém os sensores das câmeras). Suponha que a lente no furo não mude a trajetória dos raios de luz. As câmeras foram colocadas lado a lado, com seus furos afastados por uma distância c, como indica a figura.

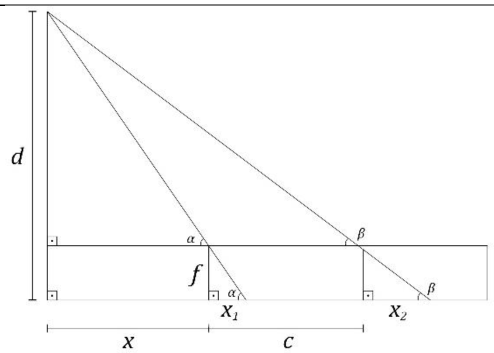


Certo objeto está a uma distância *d* do plano de imagens das câmeras (o plano que contém os sensores). Na imagem da câmera 1 (a da esquerda), o objeto aparece localizado em um pixel à direita do centro da imagem e a uma distância x_1 deste centro. Já na imagem da câmera 2 (da direita), o objeto aparece localizado em um pixel também à direita do centro da imagem e a uma distância x_1 deste centro, como mostra a figura.

A Mostre que a distância d pode ser calculada em função de c, f, x_1 e x_2, por meio da expressão $d = f \cdot \left(1 + \frac{c}{x_2 - x_1}\right)$.

B Se f e c são valores pequenos, da ordem de poucos centímetros, e o objeto está a uma distância d muito grande, como a lua ou uma estrela, o que podemos dizer sobre a relação entre x_1 e x_2?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA



a)

Semelhança de Triângulos:

$$\frac{d-f}{f} = \frac{x}{x_1} \Rightarrow x = x_1\left(\frac{d-f}{f}\right)$$

$$\frac{d-f}{f} = \frac{x+c}{x_2} \Rightarrow x + c = x_2\left(\frac{d-f}{f}\right)$$

$$x_1\left(\frac{d-f}{f}\right) + c = x_2\left(\frac{d-f}{f}\right) \Rightarrow c = (x_2 - x_1)\cdot\left(\frac{d-f}{f}\right)$$

$$\Rightarrow d = f + \frac{c \cdot f}{x_2 - x_1} \therefore d = f\left(1 + \frac{c}{x_2 - x_1}\right)$$

b)

De

$$c = (x_2 - x_1) \cdot \left(\frac{d - f}{f}\right) \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{c \cdot f}{d - f}$$

Como $d \gg c$ e $d \gg f$, então

$$\frac{c \cdot f}{d - f} \approx 0$$

Ou seja,

$$x_2 - x_1 \approx 0 \therefore x_2 \approx x_1$$