BLOCO 03

MATEMÁTICA APLICADA

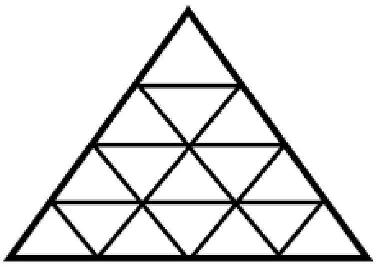
VESTIBULAR FGV 2022.2

Adm. de Empresas

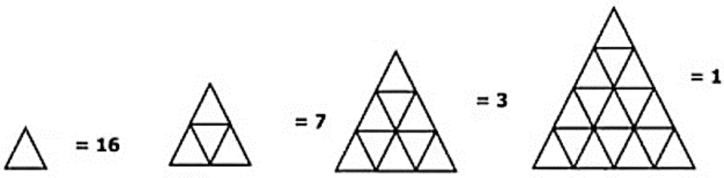
bne_edu

FGV 2022.2 – DIA 2

1) Quantos triângulos existem nesta figura?



Resolução:



Totalizando $16 + 7 + 3 + 1 = 27$

2)

a) Temos de criar uma senha de 10 caracteres que diferencie letras maiúsculas de letras minúsculas. Para que seja válida, o único requisito é que devem ser utilizadas somente estas letras, algarismos e símbolos:

$$2, 2, a, A, 8, 8, 8\ @, x, y$$

Quantas senhas começam por 2 ou terminam em dois oitos? Justifique a sua resposta.

b) Três amigos compraram juntos 8 bolas de tênis idênticas. Quantos modos podem reparti-las se cada amigo vai ficar ao menos com uma bola? Justifique a sua resposta.

Resolução:

a) As senhas que começam com $2(A)$ são:

$$\frac{1}{2}\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}$$

$$n(A) = P_9^2 = \frac{9!}{3!} = 60480$$

As senhas que terminam com dois oitos (B) são:

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}$$

$$n(B) = P_8^2 = \frac{8!}{2!} = 20160$$

As senhas que começam com 2 e terminam com dois oitos $(A \cap B)$ são:

$$\frac{1}{2}\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}$$

$$n(A \cap B) = P_7 = 7! = 5040$$

Continuação da Resolução 2:

Assim, a quantidade de senhas que começam com 2 ou terminam com dois oitos $(A \cup B)$ são:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$n(A \cup B) = 60480 + 20160 - 5040$$
$$n(A \cup B) = 75600$$

b) Chamaremos os amigos de $A, B\ e\ C$. Com a leitura do texto temos uma equação linear de soluções inteiras e positivas:

$$A + B + C = 8$$

Para que cada um tenha pelo menos uma bola, a nova soma ficará:

$$A' + B' + C' = 5$$

$$\cdots \mid \cdot\cdot \mid$$

No exemplo temos que A terá quatro bolas, B três e C uma bola. Para contar todos os casos possíveis teremos:

$$P_7^{2,5} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

Outra resolução possível é por combinação completa, onde temos 3 tipos de pessoas e 5 como quantidade total.

$$CR_{5,3} = C_{5+3-1,3-1} = C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$$

3)

a) Calcule a soma dos 31 primeiros termos de uma progressão aritmética sabendo que o décimo sexto é igual a 60.

b) Escreva qual é o trigésimo termo da sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, $1 \leq n \leq 100$, dado se termo geral:

$$a_n = n^2 + 1\ (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \dots (n-100)$$

Resolução:

a)

$$a_{16} = 60 = a_1 + 15r$$

$$S_{31} = \frac{(a_1 + a_{31})}{2} \cdot 31 = \frac{(2a_1 + 30r)}{2} \cdot 31 = 31 \cdot (a_1 + 15r)$$

$$S_{31} = 31 \cdot 60 = 1860$$

b)

$$a_n = n^2 + 1 + (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-100)$$
$$a_{30} = 30^2 + 1 + 0 = 901$$

4) O número $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ é um número racional ou um número irracional? Escreva-o na sua forma mais simples.

Resolução:

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1 - 2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = |\sqrt{2} + 1| - |\sqrt{2} - 1| = (\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1) = 2$$

Portanto, o número $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = 2$ é racional.

5)

a) Um ponto P dista $18\ cm$ do centro de uma circunferência de $9\ cm$ de raio. Qual é a medida em graus do ângulo que forma entre si as duas tangentes à circunferência traçadas desde o ponto P?

b) Em um triângulo de medidas dos lados a, b e c verifica-se que:

$$(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$$

Qual a medida do ângulo oposto ao lado de medida c?

Resolução:

a)

$$sen\ \theta = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30°$$

$$sen\ \theta = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ Ângulo formado $= 2\theta = 60°$

Logo, o ângulo agudo é 60° e o obtuso, 120°.

b)

$$(a + b + c) \cdot (a + b - c) = 3ab$$

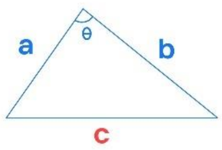
Percebe-se que há uma diferença de quadrados na expressão acima. Logo, podemos reescrever a expressão como:

$$(a + b)^2 - c^2 = 3ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = 3ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{2}$$



Fazendo analogia à lei dos cossenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\theta$$

$Logo,$ $\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$

6)

a) Se $(log_b a)^2 + (log_a b)^2 = 47$, qual é o valor numérico positivo da expressão $log_b{}^a + log_a{}^b$?

b) Entre quais dois números inteiros e consecutivos está o número

$$\frac{1}{log_{\left(\frac{1}{2}\right)}{}^{\left(\frac{1}{3}\right)}} + \frac{2}{log_{\left(\frac{1}{4}\right)}{}^{\left(\frac{1}{3}\right)}}$$

Resolução:

a)

$$\log_6 a + \log_a b = x$$

$$(\log_6 a + \log_a b)^2 = x^2$$

$$(\log_6 a)^2 + 2 \cdot \log_b a \cdot \log_a b + (\log_a b)^2 = x^2$$

$$47 + 2 \cdot \frac{\log_a a}{\log_a b} \cdot \log_a b = x^2$$

$$x^2 = 49$$

$$x = \pm 7$$

$$x = 7 \rightarrow \textit{Único valor}$$

b)

$$y = \frac{1}{\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{2}{\log_{\left(\frac{1}{4}\right)}\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$y = \frac{\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)}{\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{2 \cdot \log_{\left(\frac{1}{4}\right)}\left(\frac{1}{4}\right)}{\log_{\left(\frac{1}{4}\right)}\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$y = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{1}{2}\right) + \log_{\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$y = \log_{3^{-1}}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16}\right)$$

$$y = \log_{3^{-1}} 2^{-5} = \log_3 2^5 = \log_3 32$$

Sabendo que:

$$\log_3 27 < \log_3 32 < \log_3 81$$

$$3 < y < 4$$

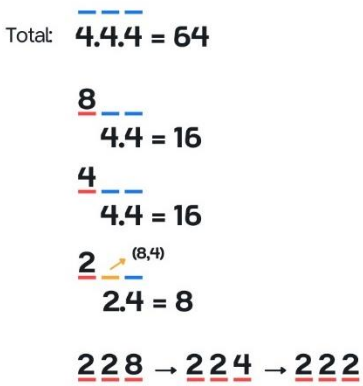
7)

a) Considere todos os números de três algarismos formados com os algarismos 1, 2, 4, e 8. Se os ordenamos em ordem **decrescente** ocupa o número 222? Justifique a resposta.

b) Em uma classe do 1° ano do Ensino Médio, 80% dos alunos foram aprovados em matemática, somente 40% foram aprovados em física e 30% foram aprovados nas duas matérias. Se escolhemos um aluno ao acaso, qual é a probabilidade de que tinha sido aprovado ao menos em uma das duas disciplinas? Justifique a resposta.

Resolução:

a)



Para encontrarmos a ordem do número 222, basta encontra quantos números são maiores que 222. Com isso, contamos $4 \cdot 4$ maiores que começam com 8, $4 \cdot 4$ que começam com 4.

Nos números que começam com 2 temos $2 \cdot 4$ que são maiores que 222, o próximo número é o 222.

Logo,

$$16 + 16 + 8 + 1 = 43^{\text{º}}$$

b)

Probabilidade pedida:

$$50\% + 30\% + 10\% = 90\%$$

8)

a) Considere os números naturais 1! , 2! , 3! ... 100!. Se escolhermos um deles, ao acaso, qual é a probabilidade de ser um número que não termina em zero? Justifique a resposta.

b) O número 100! Termina em quantos zeros? Justifique a resposta.

Resolução:

a)

$$1! = 1;\ 2! = 2;\ 3! = 6;\ 4! = 24;\ 5! = 120$$

Para números maiores ou iguais a 5!, sempre teremos um múltiplo de 120, portanto, sempre terminará em zero.

$$\begin{cases} Não\ terminam\ em\ zero: 1!,2!,3!,4! \\ Terminam\ em\ zero: 5!,6!,\dots,100! \end{cases}$$

Probabilidade:

$$p = \frac{4}{100} = 4\%$$

b) Para determinar em quantos zeros termina 100! devemos contar quantos fatores 10 ele possui. No entanto, um fator 10 é composto por um fator 2 e um fator 5. Como o número de fatores 5 é menor que o número de fatores 2, então basta contar quantos fatores 5 o número 100! possui.

Cada múltiplo de 5 contribui para 1 fator 5:

$$M(5) = \{5,10,15,\dots,100\}$$

Cada múltiplo de 25 contribui para mais 1 fator 5:

$$M(25) = \{25,50,75,100\}$$

Portanto:

$$n\big(M(5)\big) = \frac{100}{5} = 20$$

$$n\big(M(25)\big) = \frac{100}{25} = 4$$

Então, o número 100! Possui 24 fatores 5, consequentemente termina em 24 zeros.

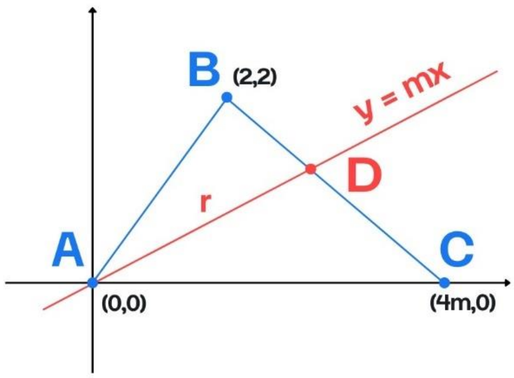
9) A reta de equação Y = mx divide o triângulo de vértices (0, 0), (2, 2) e (4m, 0) em dois triângulos de áreas iguais.

a) Quais são as coordenadas, em temos de m, do ponto de intersecção da reta $Y = mx$ com a reta que contém os pontos $(2, 2)$ e $(4m, 0)$?

b) Considerando os dois triângulos de áreas iguais, qual é a soma de todos os valores possíveis de m?

Resolução:

a)



Para que os triângulos ABD e ADC tenham áreas iguais, D precisa ser ponto médio de BC. Logo, as coordenadas de D são a média aritmética de B e C.

$$x_D = \frac{(2+4m)}{2} = 1 + 2m$$

$$y_D = \frac{2+0}{2} = 1$$

Logo, as coordenadas são $(1 + 2m, 1)$

b)

$$S_{ABC} = \frac{|2 \cdot AC|}{2} = \frac{|2 \cdot 4m|}{2} = 4|m|$$

$$r: y = \frac{2-0}{2-4m} \cdot (x-2) + 2 = \frac{1}{1-2m}(x-2) + 2$$

O ponto D é o encontro entre a reta r e a reta $y = mx$

Logo,

$$mx = \frac{1}{1-2m}(x-2) + 2$$

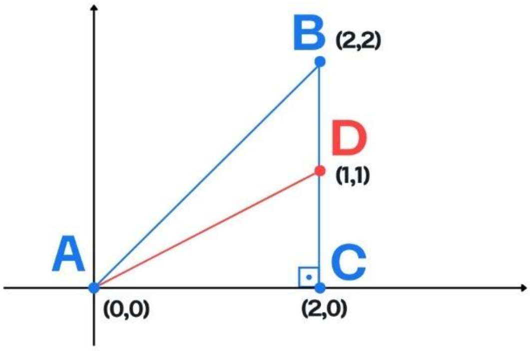
$$m \neq \frac{1}{2}$$

Resolvendo

$$x = \frac{4m}{2m^2 - m + 1}$$

$$y = \frac{4m^2}{2m^2 - m + 1}$$

Para $m = \frac{1}{2}$



$$D=\begin{cases}\left(\frac{4m}{2m^2-m+1},\frac{4m^2}{2m^2-m+1}\right), m\neq\frac{1}{2}\\(1,1), m=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$S_{ADC}=\frac{1}{2}S_{ABC}$$

Para

$m\neq\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\cdot\left|4m\cdot\frac{4m^2}{2m^2-m+1}\right|=\frac{1}{2}\cdot 4|m|$$

$m\neq 0$:

$$\left|\frac{4m^2}{2m^2-m+1}\right|=1$$

Como,

$$2m^2-m+1>0, \forall\, m\in\mathbb{R}, pois\ \Delta<0$$
$$4m^2=2m^2-m+1$$
$$2m^2+m-1=0$$

Logo,

$$m=\frac{1}{2}\ ou\ m=-1$$

Para $m=1/2$, também temos a solução:

Assim, o valor pedido é

$$-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

10) Determine o termo geral da soma:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$Sugestão:$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Resolução:

Sabendo-se que $\frac{1}{m\cdot(m+1)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$, podemos reescrever cada termo da soma como:

i)

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}=1-\frac{1}{2}$$

ii)

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

iii)

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

Portanto, podemos reescrever a soma da seguinte maneira:

$$\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\cancel{\frac{1}{m}}-\frac{1}{m+1}=1-\frac{1}{m-1}$$

Logo, o termo geral é

$$1-\frac{1}{m+1}\ ou\ \frac{m}{m+1}$$